

## 1 Formule de Taylor-Young

### Exercice 1 ★★ Limite un peu théorique –

Soit  $f$  définie sur un intervalle ouvert contenant  $x$  et de classe  $C^2$  sur cet intervalle. Calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[577]

### Exercice 2 ★★ Un calcul de limite –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[602]

### Exercice 3 ★★★★★ Dérivée d'une racine carrée –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de classe  $C^2$ .

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Que dire de  $f'(x_0)$  ? de  $f''(x_0)$  ?

2. Démontrer que  $\sqrt{f}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ , alors  $f''(x_0) = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[805]

## 2 Calculs de développements limités

### Exercice 4 ★ Somme et produit de DLs –

Calculer les développements limités suivants :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 | 2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0 |
| 3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0     | 4. $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0        |
| 5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0   | 6. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0            |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[562]

### Exercice 5 ★★ Quotient de DLs –

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0             | 2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0                  |
| 3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 | 4. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0. |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[564]

### Exercice 6 ★★ Composition de DLs –

Calculer les développements limités suivants :

1.  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$  à l'ordre 4 en 0
2.  $\exp(\sin x)$  à l'ordre 4 en 0
3.  $(\cos x)^{\sin x}$  à l'ordre 5 en 0
4.  $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$  à l'ordre 4 en 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[563]

### Exercice 7 ★★ Intégration de DLs –

Calculer les développements limités suivants :

1.  $\arccos x$  à l'ordre 5 en 0
2.  $\int_0^x e^{t^2} dt$  à l'ordre 5 en 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[807]

### Exercice 8 ★★ DLs pas en 0! –

Calculer les développements limités suivants :

1.  $\frac{1}{x}$  à l'ordre 3 en 2
2.  $\ln(x)$  à l'ordre 3 en 2
3.  $e^x$  à l'ordre 3 en 1
4.  $\cos(x)$  à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{3}$
5.  $\sqrt{x}$  à l'ordre 3 en 2

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[565]

### Exercice 9 ★★★ DL en l'infini –

Calculer les développements limités suivants :

1.  $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$  à l'ordre 3 en  $+\infty$
2.  $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x$  à l'ordre 4 en  $+\infty$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[806]

### Exercice 10 ★★★ Astucieux! –

Calculer, à l'ordre 100, le développement limité en 0 de  $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[567]

### Exercice 11 ★★★ Un DL par équation différentielle et unicité –

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, 1[$  par  $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Déterminer la fonction  $a : ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,  $f'(x) + a(x)f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ .
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $a$ .
3. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $f$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2371]

### Exercice 12 ★★★★★ Développement limité d'une fonction réciproque –

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = x \exp(x^2)$ .

1. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Justifier que  $f^{-1}$  admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Donner ce développement limité.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[808]

**Exercice 13** ★★★★★ Développement limité d'une fonction réciproque –

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par  $f(x) = 2\tan x - x$ .

1. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de classe  $C^\infty$ .

2. Justifier que  $f^{-1}$  est impaire.

3. Donner le développement limité de  $f^{-1}$  à l'ordre 6 en 0. On rappelle que  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[568]

**Exercice 14** ★★★★★ Développement limité d'une fonction réciproque –

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque sur  $\mathbb{R}$ . Donner un développement limité de  $f^{-1}$  à l'ordre 3 en 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[569]

### 3 Applications des développements limités

**Exercice 15** ★ Limites de fonctions –

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0;                     | 2. $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$ en 0;         |
| 3. $\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$ en 0;             | 4. $\frac{\exp(x^2)\cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2}$ en 0; |
| 5. $\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0. |  |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[570]

**Exercice 16** ★ Étude locale d'une courbe –

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ .

1. Donner un développement limité de  $f$  à l'ordre 3 en zéro.

2. En déduire que la courbe représentative de  $f$  admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.

3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[571]

**Exercice 17** ★ Position relative d'une courbe et de sa tangente –

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ . Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[572]

**Exercice 18** ★★ Asymptotes –

Prouver qu'au voisinage de  $+\infty$ , les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $f(x) = \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$ | 2. $g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$   |
| 3. $h(x) = \frac{x+1}{1 + \exp(1/x)}$                 | 4. $u(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$ |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[574]

---

**Exercice 19** ★★ Comparaison de fonctions –

On pose  $f(x) = 1/(1+x)$ ,  $g(x) = e^{-x}$ ,  $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$ ,  $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$ . Préciser les positions relatives au voisinage de 0 des courbes représentatives  $C_f$ ,  $C_g$ ,  $C_h$ ,  $C_k$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[575]

---

**Exercice 20** ★★★ Dérivée  $n$ -ième en 0 –

Soit  $f : x \mapsto \frac{x^4}{1+x^6}$ . Déterminer  $f^{(n)}(0)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[576]

---

**Exercice 21** ★★★ Un problème de dénombrement –

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 10 de

$$u(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}.$$

En déduire le nombre de solutions dans  $\mathbb{N}$  de l'équation  $a + 2b + 5c = 10$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2975]

---

**Exercice 22** ★★★★★ Somme des premiers entiers –

Soit  $n \geq 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp((n+1)x) - 1}{\exp(x) - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 3.
2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^n k^3.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[578]

## 4 Développement asymptotique de suites implicites

---

**Exercice 23** ★★★ Tangente –

Soit  $n \geq 1$ .

1. Montrer que l'équation  $\tan x = x$  possède une solution unique  $x_n$  dans  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ .
2. Quelle relation lie  $x_n$  et  $\arctan(x_n)$  ?
3. Montrer que  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$ .
4. En écrivant  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$  et en utilisant le résultat de la question 2., en déduire que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[579]

---

**Exercice 24** ★★★ Sinus hyperbolique –

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$ .

1. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $\tanh(x) < x$ .

2. En déduire le tableau de variations de  $f$ . On précisera les limites aux bornes.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $u \mapsto \frac{\sinh u}{u}$ .
4. En déduire que  $f$  admet au voisinage de  $+\infty$  un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

où  $a_0, a_1, a_2$  sont des réels que l'on précisera.

5. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = \frac{n+1}{n}$  admet une unique solution  $u_n > 0$ .
6. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
7. Montrer que la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .
8. Déterminer un équivalent de  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[580]

### Exercice 25 ★★★★★ Un développement asymptotique –

On considère, pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $x + \ln(x) = n$ .

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution  $x_n \in ]0, +\infty[$ , puis démontrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.
2. Démontrer que  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$ .
3. Démontrer que  $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n$ .
4. Démontrer que  $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$ . On pourra poser  $a_n$  tel que  $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$ .
5. Démontrer que  $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ .
6. En admettant éventuellement le résultat de la question précédente, dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

- |  |  |
|--|--|
| <p><b>a.</b> <math>x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n - \ln(n)</math></p> <p><b>c.</b> <math>x_n = n - \ln(n) + o(\sqrt{\ln n})</math></p> | <p><b>b.</b> <math>x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n - 2 \ln(n)</math></p> <p><b>d.</b> <math>x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n}</math>.</p> |
|--|--|

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[582]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Utiliser la formule de Taylor-Young.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Appliquer la formule de Taylor-Young à  $f$  en 0 à l'ordre 2, à  $f'$  en 0 à l'ordre 1.

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

1.  $x_0$  est un minimum local de  $f$ .
  2. Écrire le DL à l'ordre 2 de  $f$  en  $x_0$ .
- 

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Le DL de l'inverse d'une fonction se gère comme la composée. On se ramène à une écriture de la forme  $\frac{1}{1+u}$ , avec  $u$  qui tend vers 0, puisque ce sont ces DLS que l'on sait traiter.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Il faut composer les développements limités. Par exemple, pour  $\ln(\sin(x)/x)$ , il suffit de faire le DL de  $\ln(1+u)$ , puis de remplacer  $u$  par le développement limité de  $\sin(x)/x$ . Pour  $(\cos x)^{\sin x}$ , utiliser l'exponentielle.

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Intégrer des développements limités.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. Écrire  $x = 2 + h$ , puis factoriser par 2 au dénominateur.
  2. Écrire  $x = 2 + h$ , puis utiliser les propriétés de la fonction logarithme.
  3. Écrire  $x = 1 + h$ , puis utiliser les propriétés de la fonction exponentielle.
  4. Écrire  $x = \frac{\pi}{3} + h$ , puis utiliser une formule de trigonométrie.
  5. Écrire  $x = 2 + h$ , puis factoriser par 2.
- 

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Faire un changement de variables  $u = 1/x$  pour se ramener en 0.

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

$$e^x = \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} + o(x^{100}).$$

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

1. Dériver.
  2. Utiliser les techniques usuelles.
  3. Écrire de façon "abstraite" un développement limité de  $f$ . En déduire, par dérivation, un développement limité de  $f'$ . Introduire dans l'équation  $f'(x) + a(x)f(x) = 1$ . Conclure par unicité du développement limité.
- 

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = x \exp(x^2)$ .

1. Théorème des valeurs intermédiaires....et son corollaire théorème de la bijection (monotone).

2. Quelle est la régularité de  $f$  en 0 ?
  3. Écrire que  $f^{-1} \circ f(x) = x$  et utiliser l'unicité des développements limités.
- 

#### Indication pour l'exercice 13 ▲

---

1. Calculer  $f'$  et appliquer les théorèmes du cours.
  2.  $f$  est impaire.
  3. Écrire  $f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$  et utiliser que  $f \circ f^{-1}(x) = x$  en composant les développements limités.
- 

#### Indication pour l'exercice 14 ▲

---

Posons  $g = f^{-1}(x)$ . Justifier que  $g$  admet un développement limité d'ordre 3. Puis, écrire  $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ . Calculer le développement limité de  $f \circ g$  en fonction de  $a, b, c$ . En écrivant que  $f \circ g(x) = x$  et en utilisant l'unicité du développement limité, conclure.

---

#### Indication pour l'exercice 15 ▲

---

Il faut faire un développement limité jusqu'à un ordre assez grand pour que les problèmes s'éliminent !

1. Ordre 3.
  2. Ordre 2.
  3. Ordre 2.
  - 4.
  5. Ecrire sous la forme d'une différence de ln.
- 

#### Indication pour l'exercice 16 ▲

---

Pour le 3., utiliser le troisième terme du développement limité

---

#### Indication pour l'exercice 17 ▲

---

Effectuer un DL à l'ordre 3 de  $f$ .

---

#### Indication pour l'exercice 18 ▲

---

Pour le 1. développer le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique. Puis factoriser par  $e^x$  au numérateur et au dénominateur.

---

#### Indication pour l'exercice 19 ▲

---

Faire un développement limité en 0 à un ordre suffisant pour qu'on puisse distinguer les fonctions.

---

#### Indication pour l'exercice 20 ▲

---

Déterminer le développement limité à l'ordre  $n$ , puis appliquer la formule de Taylor-Young pour identifier.

---

#### Indication pour l'exercice 21 ▲

---

---

#### Indication pour l'exercice 22 ▲

---

Pour la première question, faire un banal développement limité. Pour la seconde question, écrire  $f$  d'une autre façon en remarquant que  $f$  est somme d'une série géométrique.

---

#### Indication pour l'exercice 23 ▲

---

1. Bijection !
2. Attention à l'intervalle dans lequel on travaille !

3.

4. On introduit l'écriture de  $x_n$  dans  $\arctan(x_n)$  et on fait un développement limité de  $\arctan$ , au voisinage de  $+\infty$  of course (utiliser  $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$  pour  $x > 0$ ).

---

#### Indication pour l'exercice 24 ▲

---

1. Étudier  $g(x) = \tanh(x) - x$ .
  2. Exprimer la dérivée en fonction de  $\tanh x$ .
  3. C'est du cours.
  4. Faire  $u = 1/x$ .
  5.  $f$  est une bijection de ... sur ...
  6. Le plus élégant est d'utiliser  $f^{-1}$ .
  7. Idem.
  8. Introduire  $u_n$  dans le développement asymptotique de  $f$  au voisinage de l'infini.
- 

#### Indication pour l'exercice 25 ▲

---

1. Il faut étudier la fonction.
  2. Démontrer que  $x_n \geq \ln(n)$  pour  $n$  assez grand.
  3. Écrire  $x_n = n - \ln(x_n)$ .
  4. Écrire  $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$ .
  5. Écrire  $\frac{x_n - n}{-\ln n} = 1 + b_n$ , où  $(b_n)$  tend vers 0.
-



### Correction de l'exercice 1 ▲

Puisque  $f$  est deux fois dérivable en  $x$ , elle admet un développement limité d'ordre 2 en  $x$  donné par la formule de Taylor-Young. On trouve donc

$$\begin{aligned}f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2) \\-2f(x) &= -2f(x) \\f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)\end{aligned}$$

En sommant tout et en divisant par  $h^2$ , on trouve finalement

$$\frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = f''(x) + o(1).$$

La limite recherchée vaut donc  $f''(x)$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Puisque  $f$  est de classe  $C^2$ , elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + o(x).$$

D'autre part,  $f'$  est de classe  $C^1$  en 0. Elle admet donc un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x).$$

Faisant la différence des deux DL, on trouve

$$f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f''(0)}{2}x + o(x).$$

Divisant par  $x$ , il vient

$$\frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2} + o(1).$$

La limite recherchée est donc  $f''(0)/2$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. On remarque que  $x_0$  est un minimum (local, et même global) de  $f$ . Ainsi,  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) \geq 0$ .

2. On remarque d'abord que  $\sqrt{f}$  est dérivable, comme composée de deux fonctions dérivables, en tout point  $x_0$  tel que  $f(x_0) \neq 0$ . Soit maintenant  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$  et prouvons que  $\sqrt{f}$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f''(x_0) = 0$ . Pour cela, on écrit le DL à l'ordre 2 de  $f$  en  $x_0$  (on peut le faire car  $f$  est  $C^2$ ), en utilisant les informations données par la première question. On en déduit que

$$f(x_0+h) = \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + h^2o(1).$$

Prenons la racine carrée de cette égalité, et divisons par  $h$ . On trouve que

$$\frac{\sqrt{f(x_0+h)}}{h} = \frac{|h|}{h} \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)}.$$

Supposons d'abord que  $f''(x_0) = 0$ . Alors, si  $h$  tend vers 0,  $\frac{|h|}{h}$  reste bornée (ce quotient vaut toujours 1 ou  $-1$ ) tandis que

$$\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)} = \sqrt{o(1)}$$

tend vers 0. Ainsi,

$$\frac{\sqrt{f(x_0+h)} - \sqrt{f(x_0)}}{h} = \frac{\sqrt{f(x_0+h)}}{h}$$

tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0,  $\sqrt{f}$  est dérivable en  $x_0$  de dérivée 0. Réciproquement, si  $f''(x_0) \neq 0$ , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{f(x_0+h)}}{h} = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$$

tandis que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{f(x_0+h)}}{h} = -\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$$

et le taux d'accroissement de  $\sqrt{f}$  en  $x_0$  n'admet pas de limites. La fonction n'est pas dérivable en ce point.

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4) \\ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \\ \cos(2x) &= 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour  $\cos(2x)$  car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par  $x$ , et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit

$$\sin(x) \cos(2x) = x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o(x^6).$$

4. On écrit les développements limités

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\end{aligned}$$

et on effectue le produit pour trouver

$$(\cos x) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

5. C'est la même méthode, encore plus facile car  $1+x^3 = 1+x^3+o(x^3)$ . Puisque d'autre part

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

on trouve en effectuant le produit

$$(1+x^3)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o(x^3).$$

6. Puisque  $\ln(1+x) \sim_0 x$ , il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de  $\ln(1+x)$  à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

on trouve

$$(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4).$$

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

---

1. On pose  $u = x + x^2$ , qui tend bien vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0, et on utilise

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4).$$

On calcule les puissances de  $u$ , mais bien sûr on les tronque à l'ordre 4. On trouve :

$$\begin{aligned} u &= x + x^2 \\ u^2 &= x^2 + 2x^3 + x^4 \\ u^3 &= x^3 + 3x^4 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

2. On commence par calculer le DL (à l'ordre 4 simplement !) de  $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ . Pour cela, on remarque que

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1-u}$$

avec

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^4) \end{aligned}$$

On déduit du DL de  $\frac{1}{1-u}$  que

$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et on trouve

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

3. A l'ordre 2, on a

$$\cos(x) + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

On multiplie ce DL par celui de  $\sin x - 1$

$$\sin x - 1 = -1 + x + o(x^2).$$

On trouve finalement

$$\frac{\sin x - 1}{1 + \cos x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

4. Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en  $x$  vont se simplifier.

On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

puis le produit et on trouve finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

---

1. On commence par écrire

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

On peut donc écrire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) \text{ avec } u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

En particulier, on remarque que  $o(u^2) = o(x^4)$ . De plus, on sait que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

On calcule les puissances de  $u$ , et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,

$$u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{-x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2 \times 36}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. On pose  $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ .  $u$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0, et on peut bien écrire que

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

Mais,

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\ u^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\ u^3 &= x^3 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

En remplaçant, on trouve

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp(\sin x \ln(\cos x)).$$

On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit ! Soit d'abord  $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ . On a

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ u^3 &= o(x^5) \\ u^4 &= o(x^5) \\ u^5 &= o(x^5) \end{aligned}$$

Il vient

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sin(x) \ln(\cos x) &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5) \right) \\ &= -\frac{x^3}{2} + o(x^5) \end{aligned}$$

Finalement, on pose  $v = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$ , et on voit que  $v^2 = o(x^5)$ . On obtient donc

$$\exp(\sin x \ln(\cos x)) = \exp(v) = 1 + v + O(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5).$$

Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre !

4. On commence par étudier le DL de  $\frac{1}{x} \ln(\cosh x)$ . Au voisinage de 0, le DL à l'ordre 4 du cosinus hyperbolique est donné par

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Celui de  $\ln(1 + u)$  est donné par

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, car en posant  $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ , on a déjà  $o(u^2) = o(x^4)$ . Puisque  $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ , on a en introduisant dans le DL de  $\ln(1+u)$  :

$$\frac{1}{x} \ln(\cosh x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

(on se contente de DLs à l'ordre 3 car on va les multiplier par  $x$  à la fin). Pour trouver le DL de  $(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ , on doit encore composer par l'exponentielle :

$$\exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$$

avec

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\ v^2 &= \frac{x^2}{4} + o(x^3) \\ v^3 &= \frac{x^3}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

On trouve donc

$$(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Pour la fonction initiale, ceci donne

$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

## Correction de l'exercice 7 ▲

1. La fonction arccos est dérivable en 0, et sa dérivée vaut

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette fonction est de classe  $C^\infty$  autour de 0, elle admet au moins un développement limité à l'ordre 4 en 0. Pour le calculer, on commence par écrire que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Posons  $u = x^2 + x^4 + o(x^4)$  et remarquons que  $u^2 = x^4 + o(x^4)$ . Du développement limité de  $\sqrt{1+u}$ ,

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2),$$

on déduit que

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

On intègre ce développement limité. Tenant compte de  $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ , il vient

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

2. La méthode est similaire. On remarque que

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

En intégrant, on trouve que

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5).$$

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

---

1. On pose  $x = 2 + h$ , d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o(h^3).\end{aligned}$$

En revenant à  $x$ , on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o((x-2)^3).$$

2. On pose  $x = 2 + h$ , on factorise par 2 et on utilise les propriétés de la fonction logarithme :

$$\begin{aligned}\ln(2+h) &= \ln 2 + \ln \left( 1 + \frac{h}{2} \right) \\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).\end{aligned}$$

Revenant à  $x$ , cela s'écrit encore

$$\ln(x) = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3).$$

3. On pose  $x = 1 + h$ , et on écrit

$$\begin{aligned}e^{1+h} &= e^1 e^h \\ &= e^1 + e^1 h + \frac{e^1}{2} h^2 + \frac{e^1}{6} h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

Retournant à  $x$ , on en déduit que

$$e^x = e^1 + e^1(x-1) + \frac{e^1}{2}(x-1)^2 + \frac{e^1}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

4. On pose  $x = \frac{\pi}{3} + h$ . Par une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos h - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin h \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^3) - \frac{\sqrt{3}}{2} h + \frac{\sqrt{3}}{12} h^3 + o(h^3) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} h - \frac{h^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

Revenant en  $x$ , on déduit

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\left( x - \frac{\pi}{3} \right)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + o\left( \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^3 \right).$$

5. On pose  $x = 2 + h$ , d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{2+h} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}h^3 + o(h^3).\end{aligned}$$

En revenant à  $x$ , on a

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3).$$

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

---

1. On pose  $u = \frac{1}{x}$ , de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+2u} \\ &= 1 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} + o(u^3) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

2. On commence par écrire

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x = \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right).$$

On pose alors  $u = \frac{1}{x}$ , et on cherche le développement limité en 0 de

$$\ln\left(1 + \sqrt{1+u^2}\right).$$

Il faut faire attention ici à ce que  $\sqrt{1+u^2}$  rend vers 1 et non vers 0, et donc nous ne sommes pas dans le cadre classique de l'application du développement limité du logarithme en 0. On s'y ramène en écrivant

$$\ln\left(1 + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln\left(2 + \left(\sqrt{1+u^2} - 1\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{2} = \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} + o(u^4)$$

d'où, par composition de DLS et un petit calcul,

$$\ln\left(1 + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln 2 + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{32} + o(u^4).$$

Revenant à la fonction initiale, on trouve

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x = \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

---



On écrit  $e^x = \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} + o(x^{100})$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \ln \left( \sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) &= \ln \left( e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right) \\ &= x + \ln \left( 1 - e^{-x} \left( \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right) \right) \end{aligned}$$

Mais  $e^{-x} = 1 + o(1)$ , et donc

$$\ln \left( \sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) = x + \ln \left( 1 - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \right).$$

On en déduit finalement :

$$\ln \left( \sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right) = x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}).$$

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. On dérive  $f$  et on trouve, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Il suffit donc de choisir  $a(x) = \frac{-x}{1-x^2}$ .

2. On a

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$$

et donc

$$\frac{-x}{1-x^2} = -x - x^3 + o(x^4).$$

3. Puisque  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ ,  $f$  admet un développement limité à tout ordre en 0 et  $f'$  aussi. De plus, le développement limité de  $f'$  peut s'obtenir à partir de celui de  $f$  en dérivant. Écrivons donc

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + o(x^5) \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Ainsi, un développement limité de  $f'(x) + a(x)f(x)$  est donné par

$$c_1 + (2c_2 - c_0)x + (3c_3 - c_1)x^2 + (4c_4 - c_2 - c_0)x^3 + (5c_5 - c_3 - c_1)x^4 + o(x^4).$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} c_1 &= 1 \\ 2c_2 - c_0 &= 0 \\ 3c_3 - c_1 &= 1 \\ 4c_4 - c_2 - c_0 &= 0 \\ 5c_5 - c_3 - c_1 &= 1 \end{cases}$$

On remarque enfin que  $c_0 = f(0) = 0$ . On en déduit alors facilement que

$$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 2/3, c_4 = 0, c_5 = 8/15,$$

résultat que l'on peut vérifier par un logiciel de calcul formel.

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

---

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = x \exp(x^2)$ .

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est

$$f'(x) = (2x^2 + 1) \exp(x^2) > 0.$$

En particulier,  $f$  est strictement croissante. De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Puisque  $f$  est de plus continue,  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f'$  ne s'annulant pas, on en déduit que  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$ , et donc admet un développement limité à tout ordre en 0.

3. On remarque d'abord que  $f^{-1}(0) = 0$ . Écrivons le DL de  $f^{-1}$  en 0 sous la forme

$$f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4).$$

On a de plus

$$f(x) = x + x^3 + o(x^4).$$

Posons  $y = x + x^3 + o(x^4)$ . On a alors

$$\begin{aligned} y &= x + x^3 + o(x^4) \\ y^2 &= x^2 + 2x^4 + o(x^4) \\ y^3 &= x^3 + o(x^4) \\ y^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Il vient

$$f^{-1}(f(x)) = ax + bx^2 + (a+c)x^3 + (2b+d)x^4 + o(x^4).$$

Mais,

$$f^{-1}(f(x)) = x = x + o(x^4).$$

Par unicité des développements limités, on en déduit que  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $a + c = 0$  et  $2b + d = 0$ . On obtient finalement le DL suivant pour la fonction  $f^{-1}$  :

$$f^{-1}(y) = y - y^3 + o(y^4).$$

On aurait pu, pour simplifier un peu les calculs, remarquer que la fonction  $f^{-1}$ , tout comme la fonction  $f$ , est impaire, et donc que les coefficients d'ordre pair du DL sont nuls.

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

---

1.  $f$  est clairement de classe  $C^\infty$  et sa dérivée qui vérifie  $f'(x) = 1 + 2 \tan^2 x$  est strictement positive sur  $] -\pi/2, \pi/2[$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} f = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f = +\infty$ ,  $f$  réalise une bijection de  $] -\pi/2, \pi/2[$  sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $f'$  ne s'annule pas,  $f^{-1}$  est également de classe  $C^\infty$ .

2. La fonction réciproque d'une fonction impaire est elle-même impaire. Remarquons ici d'abord que  $f^{-1}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et que cet intervalle est bien symétrique par rapport à 0. De plus, soit  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ . Alors on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(x)) \\ &= f^{-1}(f(-x)) \\ &= -x \\ &= -f^{-1}(f(x)) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

3. Puisque  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  et est impaire, elle admet un développement limité à l'ordre 6 en 0 qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6).$$

D'autre part, on sait que

$$f(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^6).$$

Le développement limité de  $f^{-1} \circ f$  en 0 s'obtient en composant les développements limités. On obtient donc

$$f^{-1} \circ f(x) = a_1x + \left(a_3 + \frac{2a_1}{3}\right)x^3 + \left(a_5 + \frac{4a_1}{15} + 2a_3\right)x^5 + o(x^6).$$

D'autre part, on sait que

$$f^{-1} \circ f(x) = x = x + o(x^6).$$

Par unicité du développement limité en 0, on en déduit le système

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_3 + \frac{2a_1}{3} &= 0 \\ a_5 + \frac{4a_1}{15} + 2a_3 &= 0 \end{cases}$$

soit  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = -2/3$ ,  $a_5 = 16/15$ . Le développement limité de  $f^{-1}$  à l'ordre 6 en 0 est donc donné par

$$f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^6).$$

#### Correction de l'exercice 14 ▲

On remarque d'abord que  $f(x) = x + x^3/2 + o(x^3)$ . Ainsi,  $f$  est continue en 0 avec  $f(0) = 0$  et  $f$  est dérivable en 0 avec  $f'(0) = 1$ . Ainsi,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Ensuite, on vérifie (par exemple en la dérivant) que  $f$  est strictement croissante. De plus,  $\lim_{-\infty} f = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ . Ainsi,  $f$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc une fonction réciproque  $g = f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $f'(0) \neq 0$  et que  $f$  est  $C^\infty$  au voisinage de 0,  $g$  est indéfiniment dérivable en 0. Ainsi,  $g$  admet un DL à tout ordre en 0. De  $f(0) = 0$ , on tire  $g(0) = 0$  et donc le DL à l'ordre 3 de  $g$  en 0 s'écrit  $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ . Pour calculer  $a, b, c$ , écrivons quel est le développement limité à l'ordre 3 de  $f \circ g$ . On a

$$f \circ g(x) = (ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)) + (ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3))^3/2 + o(g(x)^3) = x$$

soit

$$ax + bx^2 + (a^3/2 + c)x^3 + o(x^3) = x.$$

Par unicité du développement limité, on extrait

$$a = 1, b = 0, a^3/2 + c = 0$$

soit  $g(x) = x - x^3/2 + o(x^3)$ .

#### Correction de l'exercice 15 ▲

1. Effectuons un développement limité du numérateur à l'ordre 3. On a

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

La limite recherchée est  $-1/6$ .

2. Effectuons un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 2. On a

$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -2 + o(1).$$

La limite recherchée est donc égale à  $-2$ .

3. D'après les développements limités usuels,

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \sin(x) &= x + o(x^2).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ln(1+x) - \sin(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et donc que  $\ln(1+x) - \sin(x) \sim_0 \frac{-x^2}{2}$ . Ainsi,

$$\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} \sim_0 \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

4. D'une part

$$\begin{aligned}\exp(t) &= 1 + t + o(t) \\ \exp(x^2) &= 1 + x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\cos(t) &= 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \\ \cos(2x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

On fait le produit :

$$\begin{aligned}\exp(x^2)\cos(2x) &= (1 + x^2 + o(x^2))(1 - 2x^2 + o(x^2)) \\ &= 1 - 2x^2 + x^2 + o(x^2) = 1 - x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\exp(x^2)\cos(2x) - 1 = -x^2 + o(x^2) \sim_0 -x^2.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\sin(t) &= t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\ \sin(x^2) &= x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6).\end{aligned}$$

On en déduit  $\sin(x^2) - x^2 = -\frac{x^6}{6} + o(x^6) \sim_0 -\frac{x^6}{6}$ . Finalement

$$\frac{\exp(x^2)\cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2} \sim_0 \frac{-x^2}{-\frac{x^6}{6}} = \frac{6}{x^4}$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2)\cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2} = +\infty.$$

5. Il suffit d'écrire

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = x + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x).$$

La limite recherchée est donc égale à 1.

---

### Correction de l'exercice 16 ▲

---

1. Les techniques classiques de calcul montrent que :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

2. Au point d'abscisse 0, on a  $f(0) = 1/2$ ,  $f$  est dérivable et vérifie  $f'(0) = -1/4$ . Le graphe est donc tangent à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ .

3. Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Si  $x$  est assez petit, cette quantité est positive pour  $x > 0$ , et négative pour  $x < 0$  : la courbe traverse sa tangente.

---

### Correction de l'exercice 17 ▲

---

On va effectuer un DL jusqu'à l'ordre 3 de  $f$ . Pour cela, on écrit

$$f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

et posons  $u = x + \frac{x^2}{2}$ . On a  $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ , et

$$\begin{aligned} u &= x + \frac{x^2}{2} \\ u^2 &= x^2 + x^3 + o(x^3) \\ u^3 &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

La courbe représentative de  $f$  admet donc au point  $(0, \ln 2)$  une tangente d'équation  $y = \ln 2 + x$ . De plus,

$$f(x) - (\ln 2 + x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Cette différence est donc positive au voisinage de  $0^-$ , et négative au voisinage de  $0^+$ . La courbe traverse donc sa tangente en  $(0, \ln 2)$ .

---

### Correction de l'exercice 18 ▲

---

1. Remplaçons les cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques par leur développement en fonction de l'exponentielle. On obtient

$$f(x) = \frac{xe^x - e^x + xe^{-x} + e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 2}.$$

On met en facteur  $e^x$ , d'où

$$f(x) = \frac{x - 1 + xe^{-2x} + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}.$$

On va faire un développement asymptotique de  $f$ . Ce qui nous intéresse, ce sont les termes en  $x$  et les termes constants. On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{x-1+o(1)}{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Il vient

$$f(x) = (x-1+o(1)) \times \left(1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x-1+o(1).$$

La droite d'équation  $y = x-1$  est asymptote à la courbe au voisinage de  $+\infty$ . Si on cherche en plus la position par rapport à l'asymptote, on doit pousser un cran plus loin. On trouve

$$f(x) = \frac{x-1+o(e^{-x})}{1-2e^{-x}+o(e^{-x})} = (x-1+o(e^{-x}))(1+2e^{-x}+o(e^{-x})) = (x-1)+2xe^{-x}+o(e^{-x}).$$

Au voisinage de  $+\infty$ , la courbe est au-dessus de son asymptote.

2. Posons  $u = 1/x$ . Pour  $x \rightarrow +\infty$ ,  $u$  est voisin de 0. On a

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

soit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-3}) \right) \\ &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, la droite d'équation  $y = x - 1/2$  est asymptote à la courbe représentative de  $g$  au voisinage de  $+\infty$  et la courbe est au-dessus de son asymptote (au voisinage de l'infini).

3. On pose encore  $u = 1/x$ , et on obtient

$$h(x) = \frac{1 + \frac{1}{u}}{1 + e^u} = \frac{1 + 1/u}{2 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)}.$$

On calcule alors le développement limité avec les techniques usuelles et on trouve que

$$h(x) = \frac{1}{2u} + \frac{1}{4} - \frac{u}{4} + o(u) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$  est asymptote à la courbe représentative de  $h$ , et la courbe est sous son asymptote (au voisinage de l'infini).

4. On effectue un développement asymptotique au voisinage de  $+\infty$ . Pour cela, on remarque que :

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Il vient :

$$\begin{aligned} x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) &= x \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La droite d'équation  $y = x + 2$  est donc asymptote à la courbe représentative de  $u$  au voisinage de  $+\infty$ , et la courbe est située au-dessus de son asymptote.

On fait un développement limité en 0 à un ordre suffisamment grand pour qu'on puisse distinguer les fonctions. Ici, il suffit d'aller jusqu'à l'ordre 2. Le point le plus difficile est pour  $h(x)$ . Mais

$$1 - 2 \sin x = 1 - 2x + o(x^2)$$

de sorte que

$$h(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Pour les autres, on a

$$f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

$$g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$k(x) = 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

En comparant donc les termes d'ordre 2, on trouve  $h \leq k \leq g \leq f$ . La courbe représentative de  $h$  est donc située en dessous de celle de  $k$ , elle-même située en dessous de celle de  $g$ , elle-même située en dessous de celle de  $f$ , et ceci au voisinage du point  $(0, 1)$  (sans que l'on puisse préciser la taille du voisinage, et en tenant compte de  $k$  n'est défini que pour  $x \geq 0$ ).

### Correction de l'exercice 20 ▲

Remarquons que la fonction est de classe  $C^\infty$ . Par la formule de Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, et le coefficient devant  $x^n$  est  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ . D'autre part, on a :

$$\frac{x^4}{1+x^6} = x^4 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{6k} + o(x^{6n+4}).$$

Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, si  $n \equiv 4 \pmod{6}$ , alors  $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{(n-4)/6}$ , sinon,  $f^{(n)}(0) = 0$ .

### Correction de l'exercice 21 ▲

Le développement limité en 0 à l'ordre 10 de  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{a=0}^{10} x^a + o(x^{10}).$$

De la même façon, celui de  $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$  est

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{b=0}^5 x^{2b} + o(x^{10}),$$

et celui de  $h(x) = \frac{1}{1-x^5}$  est

$$\frac{1}{1-x^5} = \sum_{c=0}^2 x^{5c} + o(x^{10}).$$

Pour calculer le développement de la fonction (qui est le produit  $fgh$ ), on peut tout développer à la main et on obtient :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x)(1-x^5)} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + o(x^{10}).$$

Mais il y a une seconde façon de voir ce produit (sans vraiment le calculer) :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x)(1-x^5)} = f(x)g(x)h(x) = \left(\sum_{a=0}^{10} x^a\right) \left(\sum_{b=0}^5 x^{2b}\right) \left(\sum_{c=0}^2 x^{5c}\right) + o(x^{10}).$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(1-x)(1-x^5)} &= \sum_{a=0}^{10} \sum_{b=0}^5 \sum_{c=0}^2 x^{a+2b+5c} + o(x^{10}) \\ &= \sum_{n=0}^{10} \text{card}\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a+2b+5c = n\} x^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que  $\text{card}\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a+2b+5c = 10\} = 10$ . On peut bien sûr arriver plus facilement à ce résultat en comptant, mais il n'est pas si facile de ne pas oublier de solutions.

---

### Correction de l'exercice 22 ▲

1. On commence par écrire que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(n+1)x + \frac{(n+1)^2}{2}x^2 + \frac{(n+1)^3}{6}x^3 + \frac{(n+1)^4}{24}x^4 + o(x^4)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &= \frac{(n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}x + \frac{(n+1)^3}{6}x^2 + \frac{(n+1)^4}{24}x^3 + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}. \end{aligned}$$

Posons  $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$  et utilisant le DL de  $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ , on trouve

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3).$$

Il reste à réaliser le produit des deux développements limités. Après simplifications et factorisations, on trouve

$$f(x) = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3 + o(x^3).$$

2. On va écrire  $f$  d'une autre façon en remarquant que  $f$  est somme d'une série géométrique. On a en effet

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \exp(kx).$$

On peut alors calculer le développement limité de  $f$  en utilisant cette formule, et on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \left(1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2} + \frac{k^3 x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= n+1 + \left(\sum_{k=1}^n k\right)x + \left(\sum_{k=1}^n k^2\right)\frac{x^2}{2} + \left(\sum_{k=1}^n k^3\right)\frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on peut identifier les termes devant  $x^3$ . On trouve

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Cette méthode permet de calculer n'importe quelle somme  $\sum_{k=1}^n k^p$  (à condition d'être assez courageux pour déterminer le développement limité jusqu'à l'ordre  $p$ ).

---

### Correction de l'exercice 23 ▲



1. La fonction  $x \mapsto \tan x - x$  est une bijection strictement croissante de l'intervalle  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ . En effet, sa dérivée est égale à  $1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$ , qui est strictement positive sauf pour  $x = n\pi$ . On en déduit que l'équation  $\tan x = x$  admet une solution unique dans l'intervalle  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ .

2. Il faut prendre garde au fait que  $\arctan$  est la réciproque de  $\tan : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Ainsi, on doit écrire

$$\tan(x_n) = x_n \iff \tan(x_n - n\pi) = x_n$$

et là, puisque  $x_n$  est élément de  $] -\pi/2, \pi/2[$ , ceci est équivalent à

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n).$$

3. Puisque  $(x_n)$  est croissante et que la fonction  $\arctan$  l'est aussi, la suite  $(x_n - n\pi)$  est croissante. Puisqu'elle est majorée par  $\pi/2$ , elle est convergente, vers  $l$ . Passant à la limite dans l'équation  $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$ , on trouve  $l = \pi/2$ . On peut donc bien écrire  $x_n = n\pi + \pi/2 + o(1)$ .

4. On commence par rappeler le développement limité de  $\arctan$  en 0. Il s'obtient par intégration du développement limité de  $\frac{1}{1+x^2}$ . On a donc

$$\arctan(x) = x + o(x^2).$$

On va avoir besoin du développement limité de  $\arctan$  au voisinage de  $+\infty$ . Il s'obtient facilement à partir du développement limité précédent et de la relation  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ , vraie pour  $x > 0$ . On obtient donc, au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Utilisons maintenant la relation démontrée en 2 et ce développement limité de  $\arctan$ . En posant  $x_n = n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n$ , on obtient

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que

$$\varepsilon_n = \frac{-1}{n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

soit, en développant le terme de droite

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{-1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{\pi n}} + o(1/n^2) \\ &= \frac{-1}{n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{2n} + o(1/n)\right) + o(1/n^2) \\ &= \frac{-1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o(1/n^2). \end{aligned}$$

Ceci donne le développement limité souhaité pour la suite  $(x_n)$ .

### Correction de l'exercice 24 ▲

1. Soit, pour  $x \geq 0$ , la fonction  $g(x) = \tanh(x) - x$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée

$$g'(x) = 1 - \tanh^2 x - 1 = -\tanh^2 x < 0.$$

La fonction  $g$  est donc strictement décroissante et puisque  $g(0) = 0$ , on en déduit que  $g(x) < 0$  pour tout  $x > 0$ .

2. Un calcul direct prouve que

$$f'(x) = \left( \tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme  $\cosh$  est strictement positive, on trouve d'après la question précédente que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Calculons ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

en 0 : on pose  $u = 1/x$ , et on a

$$x \sinh(1/x) = \frac{\sinh u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u}.$$

Or,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$  par croissances comparées, et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$ . Finalement, on trouve que  $\lim_0 f = +\infty$ .  
 en  $+\infty$  : on pose encore  $u = 1/x$ , de sorte que

$$x \sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} \sim_0 \frac{u}{u} = 1.$$

Ainsi,  $\lim_{+\infty} f = 1$ .

3. en 0 : on pose  $u = 1/x$ , et on a

$$x \sinh(1/x) = \frac{\sinh u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u}.$$

Or,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$  par croissances comparées, et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$ . Finalement, on trouve que  $\lim_0 f = +\infty$ .  
 4. en  $+\infty$  : on pose encore  $u = 1/x$ , de sorte que

$$x \sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} \sim_0 \frac{u}{u} = 1.$$

Ainsi,  $\lim_{+\infty} f = 1$ .

5. C'est du cours, en utilisant le DL à l'ordre 3 de  $\sinh u$  :

$$\frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2).$$

6. On pose  $u = 1/x$  et on utilise le résultat de la question précédente. Donc, au voisinage de  $+\infty$ , on a

$$f(x) = \frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2) = 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

7. La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . C'est donc une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $] \lim_{+\infty} f, \lim_0 f[ = ]1, +\infty[$ . Comme  $(n+1)/n \in ]1, +\infty[$ , on a bien l'existence d'un unique  $u_n$  avec  $f(u_n) = \frac{n+1}{n}$ .

8. On sait que, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{n+1}{n} \geq \frac{n+2}{n+1},$$

c'est-à-dire

$$f(u_n) \geq f(u_{n+1}).$$

La fonction  $f$  étant décroissante, ceci signifie que

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

9. Première rédaction : on écrit  $u_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ . Puisque  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$  et que  $f^{-1}$  admet une limite en 1, on en déduit par composition des limites que

$$\lim_{+\infty} u_n = \lim_1 f^{-1} = +\infty.$$

Deuxième rédaction : la suite  $(u_n)$  étant croissante, ou bien elle tend vers  $+\infty$ , ou bien elle est majorée. Si elle est majorée disons par  $M$ , alors on a, puisque  $f$  est décroissante, pour tout entier  $n$ ,

$$\frac{n+1}{n} = f(u_n) \geq f(M).$$

Passons à la limite : on obtient  $1 \geq f(M)$ . Mais  $f(M) > 1$  et on a donc une contradiction. Ainsi,  $(u_n)$  ne peut pas être majorée, et elle tend donc vers  $+\infty$ .

10. Puisque  $u_n \rightarrow +\infty$ , il est légitime d'introduire  $u_n$  dans l'expression du développement asymptotique de  $f$  trouvé un peu plus haut. On a donc :

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right).$$

On remplace  $f(u_n)$  par  $1 + 1/n$  et on obtient

$$\frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{n}$$

soit  $\frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{1}{n}$ , donc  $\frac{6u_n^2}{n} \rightarrow 1$ , soit encore, en prenant la racine carrée,

$$\frac{\sqrt{6}u_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

Finalement, on a prouvé que

$$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{n}{6}}.$$

### Correction de l'exercice 25 ▲

1. Posons  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln(x)$ . Elle est continue et strictement croissante comme somme de fonctions continues et strictement croissantes. De plus,  $\lim_{0+} f = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .  $f$  réalise donc une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ . L'équation  $f(x) = n$  admet donc une unique solution  $x_n$ . De plus, on a  $f(x_n) = n < f(x_{n+1}) = n + 1$ . Puisque  $f$  est strictement croissante, ceci entraîne  $x_n < x_{n+1}$ , et donc  $(x_n)$  est strictement croissante.

2. Remarquons que

$$f(\ln n) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \leq 2\ln(n) < n = f(x_n)$$

pour  $n$  assez grand. Ainsi, pour  $n$  assez grand, on a  $x_n \geq \ln n$  et donc  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

3. On peut écrire  $x_n = n - \ln(x_n)$ . Or,  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$  et donc  $\ln(x_n) = o(x_n)$ . Autrement dit, on a

$$x_n \sim n.$$

4. Posons  $a_n$  défini par  $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$ . La relation  $x_n + \ln(x_n) = n$  donne alors  $na_n + \ln(n) + \ln(1 + a_n) = 0$ , soit

$$a_n = -\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(1 + a_n)}{n}.$$

Or,  $a_n \rightarrow 0$  et donc  $\ln(1 + a_n) = o(\ln n)$ , ce qui donne

$$a_n = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

ce qui, reporté dans  $x_n$ , donne exactement le bon résultat.

5. On procède de la même façon, en définissant cette fois une suite  $(b_n)$  par

$$\frac{x_n - n}{-\ln n} = 1 + b_n,$$

avec  $(b_n)$  qui tend vers 0, soit encore

$$x_n = n - \ln(n)(1 + b_n).$$

L'égalité  $x_n + \ln(x_n) = n$  donne

$$\begin{aligned} \ln(n)b_n &= \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}(1 + b_n)\right) \\ &\sim -\frac{\ln(n)}{n}(1 + b_n) \\ &\sim -\frac{\ln(n)}{n} \end{aligned}$$

puisque  $\frac{\ln n}{n}(1+b_n)$  tend vers 0, et que  $(b_n)$  tend aussi vers 0. Il vient  $b_n \sim \frac{-1}{n}$ , soit  $b_n = \frac{-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ , ce qui en reportant dans  $x_n$  donne le résultat voulu.

6. Toutes sont vraies, sauf la dernière.... Il suffit de revenir à la définition...

---